## Concours du 17 Juin 2023

# EPREUVE DE RAISONNEMENT LOGIQUE ET MATHEMATIQUES

| | |
|---|---|
| **Nombre de pages de l'épreuve** | **4 pages (dont une de consignes)** |
| **Durée de l'épreuve** | **1h00** |

Cette épreuve est composée de trois parties.

- **Partie 1** : Raisonnement logique (cette partie comporte 2 exercices)
- **Partie 2** : Raisonnement mathématique (cette partie comporte 4 exercices)
- **Partie 3** : Problème mathématique (cette partie comporte 2 exercices)

Dans chaque exercice, il y a quatre propositions de réponse, notée *a*, *b*, *c* et *d*. Pour chaque question, il y a exactement une réponse juste. Le candidat doit choisir pour chaque question la réponse juste.

Barème de notation : La réponse juste est notée par 1 point et les réponses fausses sont notées par - 0,5 point ou 0 point.

**<u>L'utilisation du brouillon et d'une calculatrice est autorisée</u>**

**Partie 1** : **Raisonnement logique**

**Exercice 1 :**

La jeune Andréas ne voulait pas épouser un riche homme d'affaire qu'elle jugeait trop âgé pour elle, car il avait trois fois son âge. Son père lui demande alors : « Mais si au lieu du triple, il avait le double seulement ? », « Alors j'accepterais » répondit l'imprudente Andréas qui dut épouser ce même homme d'affaire lorsque celui-ci eut ses 64 ans.

a) **Lors de la demande en mariage, Andréas avait 16 ans.** ***1 pt***
b) Lors de la demande en mariage, Andréas avait 18 ans. ***0 pt***
c) Lors de la demande en mariage, Andréas avait 32 ans. ***0 pt***
d) Aucune des réponses a), b), c) n'est juste. ***– 0, 5 pt***

**Exercice 2 :**

Le professeur d'une classe de terminale demande à 4 élèves, Alain, Fabrice, Mylène et Annie de donner chacun la négation de la proposition suivante : « Tous les habitants de la ville qui ont une plantation de cacao gagneront une voiture et prendront au moins un seau de chocolat ». Quelle est la bonne réponse ?

a) **Alain** : « Tous les habitants de la ville qui n'ont pas une plantation de cacao ne gagnerons pas une voiture et un seau de chocolat ». ***– 0,5 pt***
b) **Fabrice** : « il existe un habitant de la ville qui a une plantation de cacao, qui ne gagnera pas une voiture et ne prendra pas de seau de chocolat ». ***0 pt***
c) **Mylène** : « il existe un habitant de la ville qui a une plantation de cacao, qui ne gagnera pas une voiture ou prendra plus d'un seau de chocolat ». ***0 pt***
d) **Annie : « il existe un habitant de la ville qui a une plantation de cacao, qui ne gagnera pas une voiture ou ne prendra pas de seau de chocolat ».** ***1 pt***

**Partie 2** : **Raisonnement mathématique**

**Exercice 3 :**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(ln\,(x) - 2)$ et $g(x) = ln(x) + x - 3$.

a) La fonction $f$ est dérivable sur $[0;\ +\infty[$. ***- 0,5 pt***
b) La limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $0$ à droite est $-\infty$. ***0 pt***
c) $f$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et pour tout $x \in\ ]0;\ +\infty[$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$. ***0 pt***
d) **La courbe $(C_f)$ de $f$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points.*1pt***

**Exercice 4 :**

Une classe de 36 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans. On dénombre d'autre part 6 filles âgées de 18 ans et une seule de 16 ans. La moyenne d'âge de l'ensemble des élèves de cette classe est de :

a) 17,5 ans environ. ***0 pt***

b) 17,6 ans environ. ***0 pt***

**c) 17,2 ans environ.** ***1 pt***

d) 17 ans. **- *0,5 pt***

**Exercice 5 :**

On considère l'intégrale suivante $I_n = \int_0^x t^n e^{-t} dt$ où $x$ est un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.

a) Pour tout entier naturel non nul $n$, on a : $I_n = -x^n e^{-x} - nI_{n+1}$. **- *0,5 pt***

**b) Pour tout entier naturel non nul $n$ : $I_{n+1} = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n$.** ***1pt***

c) Pour tout entier naturel non nul $n$, : $I_{n+1} = -x^{n+1}e^{-x} - (n+1)I_n$. ***0 pt***

d) Pour tout entier naturel non nul $n$, on a : $I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1} + 1$. ***0 pt***

**Exercice 6 :**

L'algorithme ci-dessous permet de calculer le terme $u_n$ d'une suite $(u_n)$ définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

a) $u_0 = 5$. **- *0,5 pt***

b) Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 5$. ***0 pt***

c) $u_4 = -6{,}25$. ***0 pt***

**d) La suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - \frac{10}{3}$ est géométrique.** ***1 pt***

**Variables** : $n$ et $i$ des entiers, $u$ un réel

**Début de l'algorithme**

- Affecter à $u$ la valeur 50
- Pour $i$ allant de 1 à $n$
  Affecter à $u$ la valeur $-0{,}5u + 5$
- Fin Pour
- Afficher la valeur de $u$.

**Fin de l'algorithme.**

**Partie 3** : **Problème mathématique**

**Exercice 7 :**

Une entreprise utilise des machines de type M constituées de deux éléments $E_1$ et $E_2$. La défectuosité d'un seul des deux éléments $E_1$ et $E_2$ suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne. On considère les évènements suivants : A : « l'élément $E_1$ tombe en panne » et B : « l'élément $E_2$ tombe en panne ». On suppose que A et B sont deux évènements indépendants, de probabilités respectives $P(A) = 0{,}08$ et $P(B) = 0{,}05$. On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors service.

a) La probabilité que la machine soit en panne est égale à 0,122. ***0 pt***
b) La probabilité que les deux éléments soient simultanément hors service est égale à 0,13. ***– 0,5 pt***
c) La probabilité qu'un seul des deux éléments soit hors service est égale à 0,12. ***0 pt***
**d) L'espérance mathématique de X est égale à 0,13.** ***1 pt***

**Exercice 8 :**

Une entreprise loue une machine-outil. Le tarif de location est dégressif : 2 000 francs pour le 1er jour ; 1 500 francs pour le 2e jour ; … Et pour le $x^{\text{ième}}$ jour, l'entreprise donne $f(x) = 1\,000\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ francs. On désigne par $\bar{x}$ le coût moyen de location par jour pour une location d'une durée de 10 jours et par $M$ la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[0{,}5; 10{,}5]$.

**a) $M$ diffère de $\bar{x}$ de moins de 1%.** ***1 pt***
b) La valeur moyenne de $f(x)$ sur *n* jours augmente lorsque *n* augmente. ***0 pt***
c) $M$ diffère de $\bar{x}$ de plus de 1%. ***0 pt***
d) $\bar{x}$ diffère de $M$ de plus de 1%. ***– 0,5 pt***